Integral Inequalities の Exsercise 6

$K^{\varepsilon,\delta}_{g_i,h_i}$ を K_i, $K^{\varepsilon,\delta}_{g,h}$ を K と表す．$J^{\varepsilon,\delta}_n$ を J と表す．従って，

$$K(x) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} J(x,y,z)g(y)h(z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$
$$J(x,y,z) = c_0\,\mathrm{e}^{-(1/\varepsilon)|x-y-z|^2-\delta|y|^2-\delta|z|^2-\delta|x|^2},$$
$$c_0 = \frac{1}{(\pi\varepsilon)^{n/2}}.$$

$R>0$ として，

$$K_i^R(x) = \int_{|y|<R}\int_{|z|<R} J(x,y,z)g_i(y)h_i(z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$
$$L_i^{R,1}(x) = \int_{|y|\geq R}\int_{z\in\mathbb{R}^n} J(x,y,z)g_i(y)h_i(z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$
$$L_i^{R,2}(x) = \int_{|y|<R}\int_{|z|\geq R} J(x,y,z)g_i(y)h_i(z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$
$$K^R(x) = \int_{|y|<R}\int_{|z|<R} J(x,y,z)g(y)h(z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$
$$L^{R,1}(x) = \int_{|y|\geq R}\int_{z\in\mathbb{R}^n} J(x,y,z)g(y)h(z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$
$$L_i^{R,2}(x) = \int_{|y|<R}\int_{|z|\geq R} J(x,y,z)g(y)h(z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

とおく．

$$K_i(x) = K_i^R(x) + L_i^{R,1}(x) + L_i^{R,2}(x),$$
$$K(x) = K^R(x) + L^{R,1}(x) + L^{R,2}(x)$$

となる．

記号：

$$B_R = \{x\in\mathbb{R}^n \mid |x|<R\},\quad G(x) = \mathrm{e}^{-\delta|x|^2},\quad \|f\|_q = \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)},\quad \|f\|_{q,R} = \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n\setminus B_R)}.$$

仮定：

$$\|g_i\|_q = \|h_i\|_r = 1,$$
$$g_i \to g \ \text{ weakly in } L^q,\qquad h_i \to h \ \text{ in weakly in } L^r.$$

この仮定から

$$\|g\|_q \leq 1,\quad \|h\|_r \leq 1$$

が従う．

命題１． つぎが成り立つ：

$$
\begin{aligned}
|L_i^{R,1}(x)| &\le c_0 G(x)\|G\|_{r'}\|G\|_{q',R},\\
|L^{R,1}(x)| &\le c_0 G(x)\|G\|_{r'}\|G\|_{q',R},\\
|L_i^{R,2}(x)| &\le c_0 G(x)\|G\|_{q'}\|G\|_{r',R},\\
|L^{R,2}(x)| &\le c_0 G(x)\|G\|_{q'}\|G\|_{r',R}.
\end{aligned}
$$

証明 $G \in L^{q'} \cap L^{r'}$ に注意して，ヘルダーの不等式を利用しながら，

$$
\begin{aligned}
|L_i^{R,1}(x)| &\le c_0 \int_{|y|\ge R}\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\delta(|x|^2+|y|^2+|z|^2)}|g_i(y)||h_i(z)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\
&= c_0 G(x)\int_{|y|\ge R} G(y)|g_i(y)|\,\mathrm{d}y \int_{\mathbb{R}^n} G(z)|h_i(z)|\,\mathrm{d}z\\
&\le c_0 G(x)\|g_i\|_q\|G\|_{q',R}\|h_i\|_r\|G\|_{r'}\\
&= c_0 G(x)\|G\|_{r'}\|G\|_{q',R}.
\end{aligned}
$$

を得る．同様にして，

$$
|L^{R,1}(x)| \le c_0 G(x)\|G\|_{r'}\|G\|_{q',R}
$$

を得る．つぎに

$$
\begin{aligned}
|L_i^{R,2}(x)| &\le c_0 G(x)\int_{|y|<R}\int_{|z|\ge R} G(y)G(z)|g_i(y)||h_i(z)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\
&\le c_0 G(x)\int_{\mathbb{R}^n}\int_{|z|\ge R} G(y)G(z)|g_i(y)||h_i(z)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\
&\le c_0 G(x)\|G\|_{q'}\|G\|_{r',R}.
\end{aligned}
$$

同様に，

$$
|L^{R,2}(x)| \le c_0 G(x)\|G\|_{q'}\|G\|_{r',R}. \qquad \square
$$

命題２． 各 $x \in \mathbb{R}^n$ と $R > 0$ に対して，$i \to \infty$ のとき，

$$
K_i^R(x) \to K^R(x).
$$

証明 $A = R + |x|$ とおく．Taylor の定理により，

$$
\left| \mathrm{e}^{-(1/\varepsilon)|x-y-z|^2} - \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\left(-\frac{|x-y-z|^2}{\varepsilon}\right)^k \right| \le \frac{1}{(m+1)!}\left(\frac{|x-y-z|^2}{\varepsilon}\right)^{m+1}.
$$

$y, z \in B_R$ とする．このとき，

$$|x-y-z|^{2m+2} \leq (2A)^{2m+2}$$

なので，

(1) $$\left| \mathrm{e}^{-(1/\varepsilon)|x-y-z|^2} - \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \left(-\frac{|x-y-z|^2}{\varepsilon} \right)^k \right| \leq \frac{(2A)^{2m+2}}{\varepsilon^{m+1}(m+1)!}.$$

となる．

次のように表す.

$$j_m(x,y,z) = c_0 \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \left(-\frac{|x-y-z|^2}{\varepsilon} \right)^k,$$
$$J_m(x,y,z) = j_m(x,y,z)\,\mathrm{e}^{-\delta(|x|^2+|y|^2+|z|^2)},$$
$$E_m(x,y,z) = J(x,y,z) - J_m(x,y,z).$$

(1) より，$y, z \in B_R$ のとき，

(2) $$|E_m(x,y,z)| \leq \frac{c_0(2A)^{2m+2}}{\varepsilon^{m+1}(m+1)!}\,\mathrm{e}^{-\delta(|x|^2+|y|^2+|z|^2)}.$$

j_m は $2m$ 次多項式である．次のように表すことができる．

(3) $$j_m(x,y,z) = \sum_{|\alpha|+|\beta|+|\gamma| \leq 2m} a_{\alpha,\beta,\gamma} x^\alpha y^\beta z^\gamma.$$

ただし，

$$a_{\alpha,\beta,\gamma} \in \mathbb{R},$$
$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n),\ \beta = (\beta_1, \beta_2, .., \beta_n),\ \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n) \in \mathbb{Z}_+^n,$$
$$\mathbb{Z}_+ = \{ j \in \mathbb{Z} \mid j \geq 0 \},$$
$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n, \quad |\beta| = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n, \quad |\gamma| = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n,$$
$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}, \quad y^\beta = y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \cdots y_n^{\beta_n}, \quad z^\gamma = z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2} \cdots z_n^{\gamma_n}.$$

まず，

$$\begin{aligned} K_i^R(x) - K^R(x) &= \int_{B_R^2} J(x,y,z)(g_i(y)h_i(y) - g(y)h(y))\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{B_R^2} E_m(x,y,z)(g_i(y)h_i(y) - g(y)h(y))\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &\quad + \int_{B_R^2} J_m(x,y,z)(g_i(y)h_i(y) - g(y)h(y))\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \end{aligned}$$

に注意する．

$$
\begin{aligned}
I_1(m,i) &= \int_{B_R^2} E_m(x,y,z)(g_i(y)h_i(y)-g(y)h(y))\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\\
I_2(m,i) &= \int_{B_R^2} J_m(x,y,z)g_i(y)h_i(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\\
I_3(m) &= \int_{B_R^2} J_m(x,y,z)g(y)h(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}
$$

とおく．このとき

$$
K_i^R(x)-K^R(x) = I_1(m,i)+I_2(m,i)-I_3(m). \tag{4}
$$

$I_1(m,i)$ について調べる．$C=(2A)^2/\varepsilon$ とおく．Hölder の不等式を使って，

$$
\begin{aligned}
|I_1(m,i)| &\le \frac{c_0C^{m+1}G(x)}{(m+1)!}\int_{B_R^2} G(y)G(z)(|g_i(y)h_i(z)|+|g(y)h(z)|)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\
&= \frac{c_0C^{m+1}G(x)}{(m+1)!}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} G(y)|g_i(y)|\,\mathrm{d}y\int_{\mathbb{R}^n} G(z)|h_i(z)|\,\mathrm{d}z\\
&\quad+\int_{\mathbb{R}^n} G(y)||g(y)|\,\mathrm{d}y\int_{\mathbb{R}^n} G(z)|h(z)|\,\mathrm{d}z\Big)\\
&\le \frac{2c_0C^{m+1}G(x)\|G\|_{q'}\|G\|_{r'}}{(m+1)!}.
\end{aligned} \tag{5}
$$

(3) より，

$$
I_2(m,i) = \sum_{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|\le 2m} a_{\alpha,\beta,\gamma}x^\alpha\,\mathrm{e}^{-\delta|x|^2}\int_{B_R} G(y)y^\beta g_i(y)\,\mathrm{d}y\int_{B_R} G(z)z^\gamma h_i(z)\,\mathrm{d}z
$$

$G_\beta(x)=x^\beta G(x)$, $G_\gamma(x)=x^\gamma G(x)$ とおくとき，$G_\beta\in L^{q'}$, $G_\gamma\in L^{r'}$ であり，$g_i\to g$ (L^q で弱収束), $h_i\to h$ (L^r で弱収束) するので，

$$
\begin{aligned}
\int_{B_R} g_i(y)G_\beta(y)\,\mathrm{d}y &\to \int_{B_R} g(y)G_\beta(y)\,\mathrm{d}y,\\
\int_{B_R} h_i(z)G_\gamma(z)\,\mathrm{d}z &\to \int_{B_R} h(z)G_\gamma(z)\,\mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

と収束する．これより，$i\to\infty$ のとき，

$$
\begin{aligned}
I_2(m,i) &\to \sum_{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|\le 2m} a_{\alpha,\beta,\gamma}x^\alpha G(x)\int_{B_R} g(y)G_\beta(y)\,\mathrm{d}y\int_{B_R} h(z)G_\gamma(z)\,\mathrm{d}z\\
&= I_3(m).
\end{aligned} \tag{6}
$$

$\nu > 0$ を固定する．

$$\lim_{m\to\infty}\frac{C^{m+1}}{(m+1)!}=0$$

に注意して，(5) より，ある $m \in \mathbb{N}$ に対して，

$$|I_1(m,i)| < \nu \quad (i \in \mathbb{N})$$

が成り立つ．m をこの様に固定する．(6) より，$N \in \mathbb{N}$ が存在し，$i \geq N$ ならば，

$$|I_2(m,i) - I_3(m)| < \nu$$

となる．従って，$i \geq N$ のとき，

$$|K_i^R(x) - K^R(x)| \leq |I_1(m,i)| + |I_2(m,i) - I_3(m)| < 2\nu$$

となる．よって，

$$\lim_{i\to\infty} K_i^R(x) = K^R(x). \qquad \square$$

命題３．各 $x \in \mathbb{R}^n$ に対して，

$$\lim_{i\to\infty} K_i(x) = K(x).$$

証明 $\nu > 0$ とする．

$$\lim_{R\to\infty}\|G\|_{q',R} = \lim_{R\to\infty}\|G\|_{r',R} = 0$$

なので，ある $R > 0$ に対して，

$$c_0 G(x)\|G\|_{r'}\|G\|_{q',R} < \nu, \qquad c_0 G(x)\|G\|_{q'}\|G\|_{r',R} < \nu$$

が成り立つ．この様に $R > 0$ を固定する．命題１より，

$$|L_i^{R,1}(x)| < \nu, \quad |L^{R,1}(x)| < \nu, \quad |L_i^{R,2}(x)| < \nu, \quad |L^{R,2}(x)| < \nu$$

が成り立つ．命題３より，$N \in \mathbb{N}$ が存在し，$i \geq N$ のとき，

$$|K_i^R(x) - K^R(x)| < \nu$$

が成立する．従って，$i \geq N$ のとき，

$$|K_i(x) - K(x)| \leq |K_i^R(x) - K^R(x)| + |L_i^{R,1}(x)| + |L_i^{R,2}(x)| + |L^{R,1}(x)| + |L^{R,2}(x)| < 5\nu.$$

これは，

$$\lim_{i\to\infty} K_i(x) = K(x)$$

を示している．　□

定理４．$i \to \infty$ のとき，

$$\int_{\mathbb{R}^n} |K_i(x) - K(x)|^p \, \mathrm{d}x \to 0.$$

証明 ルベーグの収束定理を用いる．命題３により，

$$K_{g_i,h_i}(x) \to K_{g,h}(x) \quad (i \to \infty)$$

と各点収束する．

一方で，

$$|J(x,y,z)| \leq c_0 \, \mathrm{e}^{-\delta(|x|^2+|y|^2+|z|^2)}$$

であり，

$$|K_i(x)| \leq c_0 G(x) \int_{\mathbb{R}^n} G(y)|g_i(y)| \, \mathrm{d}y \int_{\mathbb{R}^n} G(z)|h_i(z)| \, \mathrm{d}z \leq c_0 G(x) \|G\|_{q'} \|G\|_{r'}.$$

同様にして，

$$|K(x)| \leq c_0 G(x) \|G\|_{q'} \|G\|_{r'}.$$

よって，

$$f_i(x) = |K_i(x) - K(x)|^p$$

とおくとき，

$$0 \leq f_i(x) \leq (2c_0 \|G\|_{q'} \|G\|_{r'})^p \ \mathrm{e}^{-p\delta|x|^2}.$$

x の関数

$$(2c_0 \|G\|_{q'} \|G\|_{r'})^p \ \mathrm{e}^{-p\delta|x|^2}$$

は可積分であり，

$$\lim_{i\to\infty} f_i(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

であるから，ルベーグの収束定理によって，

$$\lim_{i\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f_i(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

すなわち，

$$\lim_{i\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} |K_i(x) - K(x)|^p \ \mathrm{d}x = 0. \qquad \square$$