

Real Analysis by Stein & Shakarchi に関するメモ

$R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ とする.

$$a_1 = x_{1,1} < x_{1,2} < \cdots < x_{1,k(1)} = b_1,$$

$$a_2 = x_{2,1} < x_{2,2} < \cdots < x_{2,k(2)} = b_1,$$

$$\vdots$$

$$a_n = x_{n,1} < x_{n,2} < \cdots < x_{n,k(n)} = b_1$$

とする.

$$\Lambda = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \mid 1 \leq \alpha_i < k(i)\}$$

と定める.

$$R(\alpha) = [x_{1,\alpha_1}, x_{1,\alpha_1+1}] \times \cdots \times [x_{n,\alpha_n}, x_{n,\alpha_n+1}]$$

とおく.

定理 1.

$$|R| = \sum_{\alpha \in \Lambda} |R(\alpha)|$$

が成り立つ. ただし, $|Q|$ は直方体 Q の体積を表す.

証明 次のように計算する.

$$\begin{aligned} |R| &= (b_1 - a_1) \times \cdots \times (b_n - a_n) \\ &= (x_{1,k(1)} - x_{1,1}) \times (b_2 - a_2) \times \cdots \times (b_n - a_n) \\ &= \sum_{\alpha_1=1}^{k(1)-1} (x_{1,\alpha_1+1} - x_{1,\alpha_1}) \times (b_2 - a_2) \times \cdots \times (b_n - a_n) \\ &= \sum_{\alpha_1=1}^{k(1)-1} \sum_{\alpha_2=1}^{k(2)-1} (x_{1,\alpha_1+1} - x_{1,\alpha_1})(x_{2,\alpha_2+1} - x_{2,\alpha_2}) \times (b_3 - a_3) \times \cdots \times (b_n - a_n) \\ &\quad \vdots \\ &= \sum_{\alpha_1=1}^{k(1)-1} \cdots \sum_{\alpha_n=1}^{k(n)-1} |R(\alpha)| = \sum_{\alpha \in \Lambda} |R(\alpha)|. \end{aligned}$$

□

定理 2. R は上記の直方体とし, 直方体 $R_1, \dots, R_l$ はつぎを満たす.

$$R = \bigcup_{j=1}^l R_j$$

このとき,

$$|R| \leq \sum_{j=1}^l |R_j|$$

が成り立つ.

証明 つぎの記号を導入する.

$$R_j =: [a_{1,j}, b_{1,j}] \times \cdots \times [a_{n,j}, b_{n,j}],$$

$$T_i := \{a_{i,1}, b_{i,1}, a_{i,2}, b_{i,2}, \dots, a_{i,l}, b_{i,l}\}$$

$$T_i =: \{x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,k(i)}\}$$

$$(\text{ただし, } x_{i,1} < x_{i,2} < \cdots < x_{i,k(i)}),$$

$$\Lambda := \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \mid 1 \leq \alpha_i < k(i)\},$$

$$R(\alpha) := [x_{1,\alpha_1}, x_{1,\alpha_1+1}] \times \cdots \times [x_{n,\alpha_n}, x_{n,\alpha_n+1}],$$

$$\Lambda_j := \{\alpha \in \Lambda \mid R(\alpha) \subset R_j\}.$$

$x_{i,1} = a_i, x_{i,k(i)} = b_i$ が成り立つことを示す. $T_i \subset [a_i, b_i]$ だから, $a_i \leq x_{i,1}, x_{i,n} \leq b_i$ が分かる. 一方, $x_{i,1} = \min T_i$ なので,

$$x \in \bigcup_{j=1}^l R_j \implies x_i \geq x_{i,1} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

したがって,

$$R = \bigcup_{j=1}^l R_j$$

より,

$$x \in R \implies x_i \geq x_{i,1} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

特に, $a_i \geq x_{i,1}$ ($i = 1, 2, \dots, l$). 同様に, $x_{i,k(i)} = \max T_i$ なので,

$$x \in R \implies x_i \leq x_{i,k(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

よって, $b_i \leq x_{i,k(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). 以上より, $a_i = x_{i,1}$, $b_i = x_{i,k(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) が分かった. こうして,

$$a_i = x_{i,1} < x_{i,2} < \dots < x_{i,k(i)} = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

が分かったので, 定理 1 より,

$$(1) \quad |R| = \sum_{\alpha \in \Lambda} |R(\alpha)|.$$

つぎに,

$$\alpha(i, j) = \min\{\alpha_i \mid \alpha \in \Lambda_j\}, \quad \beta(i, j) = \max\{\alpha_i \mid \alpha \in \Lambda_j\}$$

とおき, $a_{i,j} = x_{i,\alpha(i,j)}$, $b_{i,j} = x_{i,\beta(i,j)+1}$ を示す. i, j を固定する. $\alpha \in \Lambda_j$ は $\alpha_i = \alpha(i, j)$ を満たすものとする.

$$(x_{1,\alpha_1}, \dots, x_{n,\alpha_n}) \in R_j$$

なので, $x_{i,\alpha(i,j)} \geq a_{i,j}$ が分かる. 同様に, $x_{i,\beta(i,j)+1} \leq b_{i,j}$ が分かる. こんどは, $\alpha, \beta \in \Lambda$ を

$$(a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{n,j}) = (x_{1,\alpha_1}, x_{2,\alpha_2}, \dots, x_{n,\alpha_n})$$

$$(b_{1,j}, b_{2,j}, \dots, b_{n,j}) = (x_{1,\beta_1+1}, x_{2,\beta_2+1}, \dots, x_{n,\beta_n+1})$$

となる様にする. このとき,

$$R(\alpha) \subset R_j, \quad R(\beta) \subset R_j$$

が成り立ち, したがって, $\alpha, \beta \in \Lambda_j$ が分かる. よって,

$$\alpha(i, j) \leq \alpha_i, \quad \beta_i \leq \beta(i, j).$$

すなわち,

$$x_{i,\alpha(i,j)} \leq x_{i,\alpha_i} = a_{i,j}, \quad b_{i,j} = x_{i,\beta_i+1} \leq x_{i,\beta(i,j)+1}$$

以上より,

$$x_{i,\alpha(i,j)} = a_{i,j}, \quad x_{i,\beta(i,j)+1} = b_{i,j} \quad (i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, l).$$

これより,

$$a_{i,j} = x_{i,\alpha(i,j)} < x_{i,\alpha(i,j)+1} < \cdots < x_{i,\beta(i,j)+1} = b_{i,j}$$

となり, 定理 1 より,

$$(2) \quad |R_j| = \sum_{\alpha \in \Lambda_j} |R(\alpha)|$$

が成り立つ.

今度は,

$$(3) \quad \Lambda \subset \bigcup_{j=1}^l \Lambda_j$$

を示す. $\alpha \in \Lambda$ とする. $x \in \mathring{R}(\alpha)$ を取る. $x_{i,\alpha_i} < x_i < x_{i,\alpha_i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) が成り立つ.

$$R = \bigcup_{j=1}^l R_j$$

なので, ある j に対して,

$$x \in R_j$$

となる. このとき, $a_{i,j} \leq x_{i,\alpha_i} < x_i < x_{i,\alpha_i+1} \leq b_{i,j}$ となり, 特に, $R(\alpha) \subset R_j$ が分かる. 従って, $\alpha \in \Lambda_j$ となる. よって, (3) が示された.

以上をまとめると,

$$|R| = \sum_{\alpha \in \Lambda} |R(\alpha)| \leq \sum_{j=1}^l \sum_{\alpha \in \Lambda_j} |R(\alpha)| = \sum_{j=1}^l |R_j|. \quad \square$$

定理 3. R は前と同様とし, R_j ($j = 1, 2, \dots, l$) も直方体とする.

$$R_j \subset R \quad (j = 1, 2, \dots, l), \quad \mathring{R}_j \cap \mathring{R}_k = \emptyset \quad (j \neq k)$$

が成り立つとする. このとき,

$$|R| \geq \sum_{j=1}^l |R_j|$$

が成り立つ.

証明 前と同様に, つぎの記号を導入する.

$$\begin{aligned}
R_j &:= [a_{1,j}, b_{1,j}] \times \cdots \times [a_{n,j}, b_{n,j}], \\
T_i &:= \{a_i, b_i, a_{i,1}, b_{i,1}, a_{i,2}, b_{i,2}, \dots, a_{i,l}, b_{i,l}\} \\
T_i &:= \{x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,k(i)}\} \\
&(\text{ただし, } x_{i,1} < x_{i,2} < \cdots < x_{i,k(i)}), \\
\Lambda &:= \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \mid 1 \leq \alpha_i < k(i)\}, \\
R(\alpha) &:= [x_{1,\alpha_1}, x_{1,\alpha_1+1}] \times \cdots \times [x_{n,\alpha_n}, x_{n,\alpha_n+1}], \\
\Lambda_j &:= \{\alpha \in \Lambda \mid R(\alpha) \subset R_j\}.
\end{aligned}$$

$R_j \subset R$ より, $a_i = \min T_i, b_i = \max T_i$ が分かる. したがって, $x_{i,1} = a_i, x_{i,k(i)} = b_i$ が成り立つ. 定理 1 より,

$$(1) \quad |R| = \sum_{\alpha \in \Lambda} |R(\alpha)|.$$

$\Lambda_j \subset \Lambda$ ($j = 1, 2, \dots, l$) は明らかである. すなわち,

$$(2) \quad \bigcup_{j=1}^l \Lambda_j \subset \Lambda.$$

$j \neq k$ として, $\Lambda_j \cap \Lambda_k = \emptyset$ を示す. そこで, $\alpha \in \Lambda_j \cap \Lambda_k$ とする. $x \in \mathring{R}(\alpha)$ を固定する. このとき, $R(\alpha) \subset R_j \cap R_k$ であるので,

$$x \in \mathring{R}_j \cap \mathring{R}_k$$

となる. これは矛盾である. したがって,

$$(3) \quad \Lambda_j \cap \Lambda_k = \emptyset \quad (j \neq k)$$

である.

つぎに, 前の定理の証明 (一部) の繰り返しであるが,

$$\alpha(i, j) = \min\{\alpha_i \mid \alpha \in \Lambda_j\}, \quad \beta(i, j) = \max\{\alpha_i \mid \alpha \in \Lambda_j\}$$

とおき, $a_{i,j} = x_{i,\alpha(i,j)}$, $b_{i,j} = x_{i,\beta(i,j)+1}$ を示す. i, j を固定する. $\alpha \in \Lambda_j$ は $\alpha_i = \alpha(i, j)$ を満たすものとする.

$$(x_{1,\alpha_1}, \dots, x_{n,\alpha_n}) \in R_j$$

なので, $x_{i,\alpha(i,j)} \geq a_{i,j}$ が分かる. 同様に, $x_{i,\beta(i,j)+1} \leq b_{i,j}$ が分かる. こんどは, $\alpha, \beta \in \Lambda$ を

$$(a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{n,j}) = (x_{1,\alpha_1}, x_{2,\alpha_2}, \dots, x_{n,\alpha_n})$$

$$(b_{1,j}, b_{2,j}, \dots, b_{n,j}) = (x_{1,\beta_1+1}, x_{2,\beta_2+1}, \dots, x_{n,\beta_n+1})$$

となる様にする. このとき,

$$R(\alpha) \subset R_j, \quad R(\beta) \subset R_j$$

が成り立ち, したがって, $\alpha, \beta \in \Lambda_j$ が分かる. よって,

$$\alpha(i, j) \leq \alpha_i, \quad \beta_i \leq \beta(i, j).$$

すなわち,

$$x_{i,\alpha(i,j)} \leq x_{i,\alpha_i} = a_{i,j}, \quad b_{i,j} = x_{i,\beta_i+1} \leq x_{i,\beta(i,j)+1}$$

以上より,

$$x_{i,\alpha(i,j)} = a_{i,j}, \quad x_{i,\beta(i,j)+1} = b_{i,j} \quad (i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, l).$$

これより,

$$a_{i,j} = x_{i,\alpha(i,j)} < x_{i,\alpha(i,j)+1} < \dots < x_{i,\beta(i,j)+1} = b_{i,j}$$

となり, 定理 1 より,

$$(4) \quad |R_j| = \sum_{\alpha \in \Lambda_j} |R(\alpha)|$$

が成り立つ.

(1), (2), (3), (4) を組み合わせて,

$$|R| = \sum_{\alpha \in \Lambda} |R(\alpha)| \geq \sum_{j=1}^l \sum_{\alpha \in \Lambda_j} |R(\alpha)| = \sum_{j=1}^l |R_j|. \quad \square$$

系 1. R, R_j ($j = 1, 2, \dots, l$) は直方体で次を満たすとする.

$$R = \bigcup_{j=1}^l R_j, \quad \overset{\circ}{R}_j \cap \overset{\circ}{R}_k \quad (j \neq k).$$

このとき,

$$|R| = \sum_{j=1}^l |R_j|$$

が成り立つ.

証明 定理 2 と定理 3 を合わせる. $\square$

系 2. R, R_j ($j = 1, 2, \dots, l$) は直方体とする.

$$R \subset \bigcup_{j=1}^l R_j$$

が成り立つとする. このとき,

$$|R| \leq \sum_{j=1}^l |R_j|$$

が成立する.

証明 $Q_j = R \cap R_j$ とおく. Q_j は直方体である. 定理 3 より,

$$(1) \quad |Q_j| \leq |R_j|$$

が分かる. また,

$$R = \bigcup_{j=1}^l Q_j$$

も分かる. 定理 2 より,

$$(2) \quad |R| \leq \sum_{j=1}^l |Q_j|.$$

(1), (2) より,

$$|R| \leq \sum_{j=1}^l |R_j|.$$

$\square$