weak L^q 空間 $L^q_w(\mathbb{R}^n)$ に関するメモ

つぎの様におく.

$$N_1 = \sup_{\alpha>0} \alpha |\{x : |f(x)| > \alpha\}|^{1/q},$$

$$N_2 = \sup_{A} |A|^{-1/q'} \int_A |f| \, \mathrm{d}x.$$

命題１． $N_2 < \infty \implies N_1 < \infty$.

以下では,

$$S(\alpha) = \{x : |f(x)| > \alpha\}, \qquad F(\alpha) = |S(\alpha)|$$

と表す.

証明 N_2 の定義より,

$$\int_A |f| \, \mathrm{d}x \le N_2 |A|^{1/q'} \tag{1}$$

が全ての可測集合 A ($|A| < \infty$) に対して成り立つ．$\alpha > 0$ とする．A_k ($k \in \mathbb{N}$) を

$$A_k = S(\alpha) \cap B_{0,k}$$

と定義する．A_k は可測集合であり，$|A_k| < \infty$ を満たす．従って，(1) より

$$\int_{A_k} |f| \, \mathrm{d}x \le N_2 |A_k|^{1/q'}.$$

A_k 上で，$|f| > \alpha$ が成り立つから,

$$\int_{A_k} |f| \, \mathrm{d}x \ge \int_{A_k} \alpha \, \mathrm{d}x = \alpha |A_k|.$$

よって,

$$\alpha |A_k| \le N_2 |A_k|^{1/q'}$$

が得られる．これより,

$$\alpha |A_k|^{1/q} \le N_2.$$

単調収束定理より,

$$F(\alpha) = |S(\alpha)| = \lim_{k\to\infty} |A_k|.$$

従って，

$$\alpha|S(\alpha)|^{1/q} \le N_2.$$

これより，$N_1 \le N_2$. 特に，$N_1 < \infty$. $\square$

命題 2．$N_1 < \infty \implies N_2 < \infty$.

証明 $\alpha < \beta$ のとき $S(\alpha) \supset S(\beta)$ なので，$F(\alpha)$ は非増加関数である．

$$S(\alpha) = \{x : |f| > \alpha\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{x : |f| > \alpha + \frac{1}{k}\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} S(\alpha + 1/k)$$

なので，$F(\alpha) = F(\alpha + 0)$ が成り立つ．

$t > 0, |A| = t$ とする．$\alpha > 0$ を $F(\alpha - 0) \ge t \ge F(\alpha)$ となる様に選ぶ．

$$\int_A |f|\,\mathrm{d}x = \int_{A\cap S(\alpha)} |f|\,\mathrm{d}x + \int_{A\setminus S(\alpha)} |f|\,\mathrm{d}x \le \int_{A\cap S(\alpha)} |f|\,\mathrm{d}x + \alpha|A \setminus S(\alpha)|$$

であり，

$$F(\alpha) = |S(\alpha) \setminus A| + |A \cap S(\alpha)|$$

であるから，

$$\begin{aligned}
\int_A |f|\,\mathrm{d}x &\le \int_{S(\alpha)} |f|\,\mathrm{d}x - \int_{S(\alpha)\setminus A} |f|\,\mathrm{d}x + \alpha(|A| - |A \cap S(\alpha)|) \\
&\le \int_{S(\alpha)} |f|\,\mathrm{d}x - \alpha|S(\alpha) \setminus A| + \alpha(|A| - |A \cap S(\alpha)|) \\
&= \int_{S(\alpha)} |f| dx + \alpha\bigl(|A| - (A \cap S(\alpha) + |S(\alpha) \setminus A|)\bigr) \\
&= \int_{S(\alpha)} |f|\,\mathrm{d}x + \alpha(|A| - F(\alpha)).
\end{aligned}$$

以下，$N_1 < \infty$ とする．このとき，$tF(t)^{1/q} \le N_1$ $(t > 0)$ であり，特に，$\alpha F(\alpha - 0)^{1/q} \le N_1$ が成り立つ．従って，

$$\alpha|A|^{1/q} = \alpha t^{1/q} \le \alpha F(\alpha - 0)^{1/q} \le N_1.$$

よって，

$$\int_A |f|\,\mathrm{d}x \le \int_{S(\alpha)} |f|\,\mathrm{d}x + |A|^{1/q'} N_1.$$

また，

$$|A|^{-1/q'} = t^{-1/q'} \leq F(\alpha)^{-1/q'}$$

が成り立つ．以上より，

$$N_2 \leq \sup_{\alpha>0} F(\alpha)^{-1/q'} \int_{S(\alpha)} |f| \, \mathrm{d}x + N_1. \tag{1}$$

$\alpha > 0$ とする．$tF(t)^{1/q} \leq N_1$ $(t > 0)$ であるから，

$$F(t) \leq \left(\frac{N_1}{t}\right)^q \quad (t > 0).$$

これより，

$$F(\alpha) = \left(\frac{N_1}{\tau}\right)^q$$

となるが $\tau \geq \alpha$ 存在する．

$$\int_{S(\alpha)} |f| \, \mathrm{d}x = \int_\alpha^\infty F(t) \, \mathrm{d}t$$

であるから，

$$\int_{S(\alpha)} |f| \, \mathrm{d}x = \int_\alpha^\tau F(t) \, \mathrm{d}t + \int_\tau^\infty F(t) \, \mathrm{d}t.$$

F は非増加関数であり，

$$\begin{aligned}
&\int_{S(\alpha)} |f| \, \mathrm{d}x \leq F(\alpha)(\tau - \alpha) + \int_\tau^\infty F(t) \, \mathrm{d}t \\
&\leq F(\alpha)(\tau - \alpha) + N_1^q \int_\tau^\infty t^{-q} \, \mathrm{d}t \\
&= F(\alpha)(\tau - \alpha) + N_1^q \frac{\tau^{1-q}}{q-1}.
\end{aligned}$$

これより，

$$\begin{aligned}
&F(\alpha)^{-1/q'} \int_{S(\alpha)} |f| \, \mathrm{d}x \leq F(\alpha)^{1/q}(\tau - \alpha) + N_1^q F(\alpha)^{-1/q'} \frac{\tau^{1-q}}{q-1} \\
&\leq (F(\alpha)\tau^q)^{1/q} + N_1^q \left(\frac{\tau}{N_1}\right)^{q/q'} \frac{\tau^{1-q}}{q-1} \\
&= N_1 + \frac{N_1}{q-1} = \frac{qN_1}{q-1}.
\end{aligned}$$

よって，(1) より，

$$N_2 \leq \frac{(2q-1)N_1}{q-1}. \qquad \square$$