

state constraint problem は Dirichlet problem

$$H(x, u, Du) = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

$$u = g \quad \text{on } \partial\Omega$$

において, $g = \infty$ の場合に相当する問題です. optimal control で見ると,

$$H(x, u, p) = \lambda u + \max_a (-g(x, a) \cdot p - f(x, a))$$

として, value function が

$$V(x) = \inf_{\alpha \text{ admissible}} \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(X(t), \alpha(t)) dt$$

で与えられるものです. ただし,

$$\dot{X}(t) = g(X(t), \alpha(t)) \quad t > 0, \quad X(0) = x$$

であり, α が admissible であるとは

$$X(t) \in \Omega \quad (t > 0)$$

を満たすことです. ($X(t) \in \bar{\Omega}$ ($t > 0$) を考えることもある.) 最初に, H. M. Soner 氏が粘性解の枠組みで考えています (SIAM J. Contr. Optim., 24, no. 3: 552-561, 1986).