$A\quad n \times n$ 実対称行列

$(\lambda_i, e_i)\quad A$ の固有値と固有ベクトルの組 $(i = 1, ..., n)$

命題. $1 \le p < \infty$ とする．次の等式が成り立つ：

$$\left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^p\right)^{1/p} = \sup_{(f_1,...,f_n)\in \mathrm{ONB}} \left(\sum_{i=1}^n |(Af_i,\, f_i)|^p\right)^{1/p}.$$

ただし，$(\cdot, \cdot)$ はユークリッド内積を表す.

Proof. $I := (\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^p)^{1/p}$, $J := \sup_{(f_1,...,f_n)\in \mathrm{ONB}} (\sum_{i=1}^n |(Af_i,\, f_i)|^p)^{1/p}$ とおく. $(e_1, ...e_n) \in \mathrm{ONB}$ を仮定してよい．従って,

$$I = \left(\sum_{i=1}^n |(Ae_i, e_i)|^p\right)^{1/p} \le J.$$

$P = (p_{ij})$ を

$$f_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} e_j \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

となるように選ぶ．P は直交行列であり,

$$\sum_{i=1}^n p_{ij}^2 = \sum_{j=1} p_{ij}^2 = 1 \quad (j = 1, 2, ..., n)$$

が成り立つ．したがって,

$$(Af_i, f_i) = \sum_{j,k=1}^n p_{ij} p_{ik} (Ae_j, e_k) = \sum_{j=1}^n p_{ij}^2 \lambda_j$$

となり，さらに，関数 $r \mapsto |r|^p$ の凸性を使って,

$$|(Af_i, f_i)|^p \le \left(\sum_{j=1}^n p_{ij}^2 |\lambda_j|\right)^p \le \sum_{j=1}^n p_{ij}^2 |\lambda_j|^p$$

を得る．これより,

$$\left(\sum_{i=1}^n |(Af_i, f_i)|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i,j=1}^n p_{ij}^2 |\lambda_j|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^p\right)^{1/p}.$$

よって，$J \leq I$. □

最後に，つぎに注意する：

$$|((A+B)f_i, f_i)| \leq |(Af_i, f_i)| + |(Bf_i, f_i)|.$$

従って，

$$\begin{aligned}
&\sup_{(f_1,\dots,f_n)\in \mathrm{ONB}} \left(\sum_{i=1}^n |((A+B)f_i, f_i)|^p \right)^{1/p} \\
&\leq \sup_{(f_1,\dots,f_n)\in \mathrm{ONB}} \left(\sum_{i=1}^n (|(Af_i, f_i)| + |(Bf_i, f_i)|)^p \right)^{1/p} \\
&\leq \sup_{(f_1,\dots,f_n)\in \mathrm{ONB}} \left(\sum_{i=1}^n |(Af_i, f_i)|^p \right)^{1/p} + \sup_{(f_1,\dots,f_n)\in \mathrm{ONB}} \left(\sum_{i=1}^n |(Bf_i, f_i)|^p \right)^{1/p}.
\end{aligned}$$