

$$C = \{y \in \mathbb{R}^2 : y \in F \cap (F^*)^c, x + y \in F^* \cap F^c\}$$

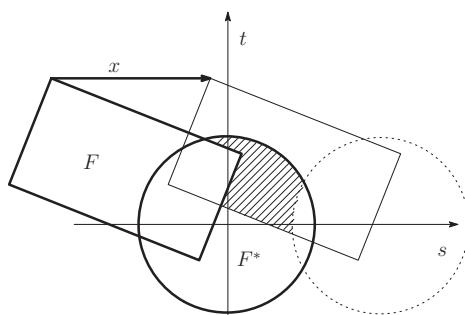
$$D = (F \cap (F^*)^c + x) \cap (F^* \cap F^c)$$

とおく. つぎに注意する:

$$y \in C \iff x + y \in D$$

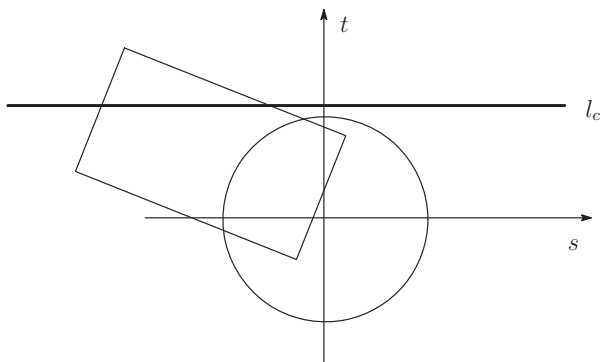
これより,

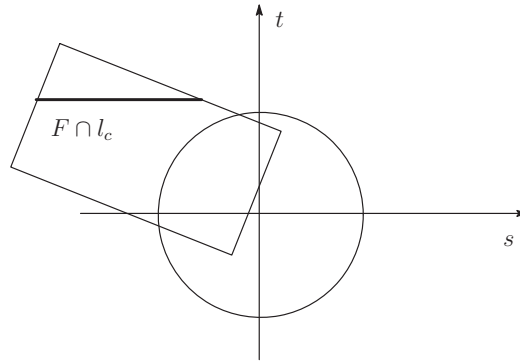
$$\mathcal{L}^2(C) = \mathcal{L}^2(D).$$



$D = \text{斜線部分}$

s 軸をベクトル x に平行にとり, t 軸を x に直交するようにとる. $l_c = \{(s, c) : s \in \mathbb{R}\}$ とする. すなわち, l_c は s 軸に平行な直線で t 切片を c とするものである. e_1 はベクトル x に平行な (従って, s 軸に平行な) 単位ベクトルとする.

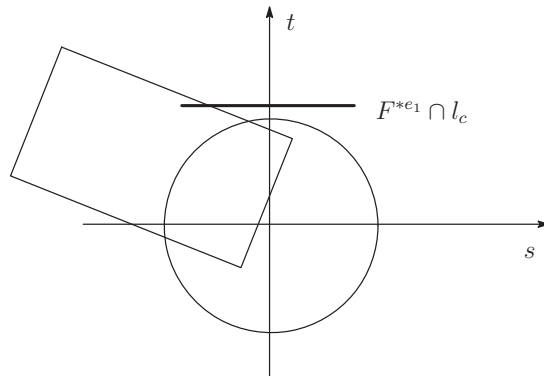




Steiner symmetrization の定義により,

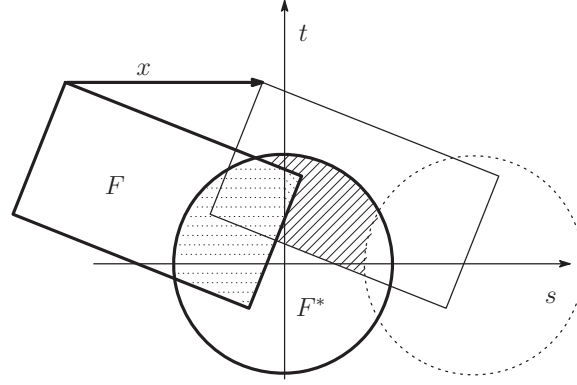
$$\mathcal{L}^1(F^{*e_1} \cap l_c) = \mathcal{L}^1(F \cap l_c) \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

が成り立つ.



さらに, $F^{*e_1} \cap l_c$ は t 軸に対称な線分であり, $F^* \cap l_c$ も t 軸に対称な線分であるから, つぎが成り立つ.

$$\mathcal{L}^1(F^* \cap F^{*e_1} \cap l_c) = \min\{\mathcal{L}^1(F \cap l_c), \mathcal{L}^1(F^* \cap l_c)\} \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$



上の図を参考にして,

$$\mathcal{L}^1((F \cap F^* \cap l_c) \cup (D \cap l_c)) \leq \min\{\mathcal{L}^1(F \cap l_c), \mathcal{L}^1(F^* \cap l_c)\} \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

$F \cap D = \emptyset$ なので,

$$\mathcal{L}^1((F \cap F^* \cap l_c) \cup (D \cap l_c)) = \mathcal{L}^1(F \cap F^* \cap l_c) + \mathcal{L}^1(D \cap l_c).$$

以上より,

$$\mathcal{L}^1(F \cap F^{*e_1} \cap l_c) \geq \mathcal{L}^1(F \cap F^* \cap l_c) + \mathcal{L}^1(D \cap l_c).$$

これと Fubini の定理より,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^2(F^* \cap F^{*e_1}) &= \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{F^* \cap F^{*e_1}}(s, t) \, ds \, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}^1(F^* \cap F^{*e_1} \cap l_t) \, dt \\ &\geq \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{L}^1(F \cap F^* \cap l_t) + \mathcal{L}^1(D \cap l_t)) \, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}^1(F \cap F^* \cap l_t) \, dt + \int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}^1(D \cap l_t) \, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{F \cap F^*}(s, t) \, ds \, dt + \int_{\mathbb{R}^2} \chi_D(s, t) \, ds \, dt \\ &= \mathcal{L}^2(F \cap F^*) + \mathcal{L}^2(D) = \mathcal{L}^2(F \cap F^*) + \mathcal{L}^2(C). \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^2(F^* \cap F^{*e_1}) &= \int \chi_{F^{*e_1}} \chi_{F^*} \, dy, \\ \mathcal{L}^2(F \cap F^*) &= \int \chi_F \chi_{F^*} \, dy = P, \\ \mathcal{L}^2(C) &= \int \chi_{F \cap (F^*)^c}(y) \chi_{F^* \cap F^c}(x + y) \, dy = \int \chi_{F \cap (F^*)^c}(-y) \chi_{F^* \cap F^c}(x - y) \, dy \\ &= \int A(x - y) B(-y) \, dy = C(x) \end{aligned}$$

に注意する. よって,

$$\int \chi_{F^{*e_1}} \chi_{F^*} \, dy = P + C(x).$$